ДВИЖЕНИЕ НА СПЪТНИК В ЕКВАТОРИАЛНАТА РАВНИНА НА ПЛАНЕТА

Костадин Шейретски[1], Меглена Лазарова[1], Румен Шкевов[2], Николай Ерохин[3]

[1] Университет за национално и световно стопанство
[2] Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
[3] Институт за космически изследвания – Руска академия на науките
e-mail: ksheiretsky@mail.space.bas.bg

Ключови думи: *нелинейна динамика, метод на Поанкаре-Линдщед, движение на спътник, адиабатични инварианти*

Резюме: *Изследва се орбиталното движение на екваториален спътник на планета. Изведен е интеграла на енергия в адиабатични инварианти. Използван е метода на Поанкаре-Линдщед за намиране на приближено решение, което улеснява по-нататъшния анализ на динамичните явления протичащи в системата. Изведено е уравнението на Ойлер за движението на спътника олколо неговия център на масите.*

SATELLITE DYNAMICS IN PLANET EQUATORIAL PLANE

Kostadin Sheiretsky[1], Meglena Lazarova[1], Rumen Shkevov[2], Nikolay Erokhin[3]

[1]University of National and World Economy
[2]Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
[3]Space Research Institute – Russian Academy of Sciences
e-mail: ksheiretsky@mail.space.bas.bg

Key words: *nonlinear dynamics, Poincaré-Lindstedt method, satellite dynamics, adiabatic invariants*

Abstract: *Planet equatorial satellite dynamics is investigated. Adiabatic invariant of constant of motion is leaded. The Poincaré-Lindstedt method is applied. The approximation allows analyze system dynamics processes. The Euler equation for satellite dynamics around center of masses is worked out.*

Въведение

Изучаването на нелинейното движение на естествени и изкуствени спътници е фундаментален въпрос в космическите изследвания. Движението на спътник в централно поле е задача, плодотворна за аналитични разглеждания [1,2]. От една страна, простотата на математичните изводи позволява да се изведат опростени уравнения описващи динамиката на системата, а от друга формулите съдържат нелинейните ефекти които ни интересуват - ефекти проявяващи се при далеч по сложни динамични системи. Извеждането на уравнения в подходящ за аналитично изследване вид играе голяма роля в изучаването на динамични системи от типа планета-спътник [3]. Напълно интегруемата задача за две тела може да бъде използвана като отправна точка на по-общата задача за движение на тела с произволна форма в тяхното собствено гравитационно поле. В общият случай задачата е неинтегруема и за нейното аналитично изучаване се прибягва до сложни аналитични техники. Методът на каноничните преобразувания при изучаването на хамилтонови системи в небесната механика [2, 4]. Посредством този метод може да бъде изведено уравнението на енергията на системата в променливи на Делоне [5]. В настоящата статия горепосочения подход е приложен за движение на спътник със сферична форма в екваториалната равнина на сплесната при полюсите планета [6]. Изведеното уравнение е подходящо като първо приближение на по-сложни задачи [7], при които могат да бъдат отчетени и параметри като форма на спътника, движение при взаимодействие на електрични и магнитни полета, както и отчитането на приливните сили [3,8,9].

Интегрирането на уравненията на движението на спътника в специални функции е неудобно за последващ анализ на механичната система, като отправна точка за разглеждането на движението на спътника около неговия масов център. При отчитането на формата на спътника в нулево приближение могат да се използват резултатите за орбиталното движение, получени при разглеждането му като сферично тяло. Опростено уравнение в този случай може да бъде получено чрез метода на Поанкаре-Линдщед [10,11]. В последствие получените аналитични изрази могат да бъдат поставени в уравненията на Ойлер, като по този начин получаваме диференциалното уравнение за движението на спътника около неговия масов център [12].

Орбитална динамика на движението

Ще изведем динамичните уравнения на спътник движещ се в екваториалната равнина на сплесната при полюсите планета в променливи действие – ъгъл.

В сферични координати кинетичната енергия е равна на

(1) $$E_k = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right),$$

където m е маса на спътника, M е маса на планетата, (R,θ,φ) са полярните координати на спътника. Каноничните импулси имат вида:

$$p_r = m\dot{R},\ p_\theta = mR^2\dot{\theta},\ p_\varphi = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}.$$

Хамилтонияна на тази система е равен на:

(2) $$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^{\,2} + \frac{p_\theta^{\,2}}{R^2} + \frac{p_\varphi^{\,2}}{R^2\sin^2\theta}\right) - \frac{k}{R} - V(R), \quad k = \gamma mM.$$

γ - универсална гравитационна константа.

Полагаме: $S = S_r(R) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi)$, тогава диференциалното уравнение на Хамилтон-Якоби има вида:

(3) $$\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 - 2m\left(E + \frac{k}{R} + V(R)\right) = 0.$$

Уравнението се разпада на три обикновени диференциални уравнения:

(4) $$\frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha_\varphi;\ \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^{\,2}}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta;\ \left(\frac{dS_r}{dR}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^{\,2}}{R^2} - 2m\left(E + \frac{k}{R} + V(R)\right) = \alpha_r$$

където $\alpha_\varphi, \alpha_\theta, \alpha_r$ са константи, E -енергия на системата.

Записваме променливите действие във вида:

(5) $$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = \alpha_\varphi,\ J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{\alpha_\theta^{\,2} - \frac{\alpha_\varphi^{\,2}}{\sin^2\theta}}\,d\theta,$$
$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r dR = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2m\left(E + \frac{k}{R} + V(R)\right) - \frac{\alpha_\theta^{\,2}}{R^2}}\,dR.$$

Съответните ъгли намираме, като използваме функцията на Якоби:

(6) $$w_r = \frac{\partial S}{\partial J_r},\ w_\varphi = \frac{\partial S}{\partial J_\varphi},\ w_\theta = \frac{\partial S}{\partial J_\theta}.$$

Може да се докаже, че $\alpha_\varphi = J_\varphi$, $\alpha_\theta = J_\varphi + J_\theta$.

Записваме интеграла на действието във вида:

(7) $$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2m\left(E + \frac{k}{R} + V(R)\right) - \frac{\left(J_\varphi + J_\theta\right)^2}{R^2}}\,dR\ .$$

Подходящо е да се премине към нови действие-ъгъл променливи (променливи на Делоне) по следния начин:

$$L = J_r + J_\varphi + J_\theta,\ l = w_r,\ G = J_\theta + J_\varphi,\ g = w_\theta - w_r,\ H = J_\varphi,\ h = w_\varphi - w_\theta.$$

Конкретно потенциала на спътник движещ се в екваториалната равнина на сплесната планета е $V(r)=\frac{\alpha}{R^3}$, $\alpha<<1$, тогава интеграла има следния вид:

(8) $$J_r=\frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{R}+\frac{\alpha}{R^3}\right)-\frac{\left(J_\varphi+J_\theta\right)^2}{R^2}}dR\,.$$

Като използваме решения интеграл, изразяваме енергията в първо приближение:

(9) $$E=-\frac{mk^2}{2\left(J_r+J_\varphi+J_\theta\right)^2}-\frac{mk^2}{\left(J_r+J_\varphi+J_\theta\right)^3}\frac{m^2k\alpha}{\left(J_\varphi+J_\theta\right)^3}\,.$$

Нека да намерим съответните честоти.

$$\omega_r=\frac{\partial E}{\partial J_r}=\frac{mk^2}{\left(J_r+J_\varphi+J_\theta\right)^3}\,;\ \omega_\theta=\frac{\partial E}{\partial J_\theta}=\omega_r+3\omega_r\frac{m^2k\alpha}{\left(J_\varphi+J_\theta\right)^4}\,.$$

Формулата за намиране на ъгъла на прецесия е $\Delta\omega=\dot{g}=\omega_\theta-\omega_\varphi=\frac{6\pi\alpha}{kP^2}$, където сме отчели, че $\omega_r=2\pi$, а P е параметъра на несмутената елипса.

Можем да запишем приближено израза за енергията посредством променливи на Delaunay в следния вид:

(10) $$E=-\frac{mk^2}{2L^2}-\frac{2\pi m^2k\alpha}{G^3}\,.$$

Съответното диференциално уравнение за траекторията е:

(11) $$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{\frac{G}{R^2}}{\sqrt{2m\left(E-U(R)\right)-\frac{G^2}{R^2}}}=\frac{\frac{G}{R^2}}{\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{R}+V(R)\right)-\frac{G^2}{R^2}}}$$, където $V(r)=\frac{\alpha}{R^3}$.

Правим заместването $u=\frac{G}{R}$ и достигаме до диференциално уравнение за траекторията във вида:

(12) $$\frac{d\varphi}{du}=-\frac{1}{\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{G}u+\frac{\alpha}{G^3}u^3\right)-u^2}}\,.$$

Характерът на движението се определя от полиномът

$$P(u)=u^3-\frac{G}{2m\alpha}^3u^2+\frac{k}{\alpha}G^2u+\frac{E}{\alpha}G^3\,.$$

За реалните корени на полинома може да се направи извода

$E<0\Rightarrow P(u)=0\Rightarrow$

1.) $u_1=u_2=u_3>0\in R$

2.) $0<u_3<u_2<u_1\in R.$

При реалните движения полинома е положителен, ето защо променливата попада в един от двата интервала: $u\in\left[u_3,u_2\right]$ или $u\in\left[u_1,+\infty\right]$. Втория интервал съответства на периодично движение минаващо през центъра на притегляне, ето защо разглеждаме движението само в първия интервал.

Въвеждаме параметрите: $R_a=\frac{G}{u_3},R_p=\frac{G}{u_2}$,

(13) $$P=\frac{2R_aR_p}{R_a+R_p},\ e=\frac{R_a-R_p}{R_a+R_p},\ a=\sqrt{(u_1-u_3)A}\,.$$

Като отчитаме движението от перихелия, може да запишем уравнението на траекторията във вида:

(14) $$R = \frac{P}{1+e\left[cn^2 x - sn^2 x\right]},\ x = a\varphi.$$

Траекторията на движение на екваториален спътник може да се изведе в практически използваема формула, като се отчете, че сплеснатостта на планетите е доста малка в сравнение с единицата. За тази цел разглеждаме двата интеграла на движение

(15) $$\frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3} = E,$$

(16) $$L = mR^2\dot{\varphi}.$$

Изразявам разстоянието до силовия център R като функция на полярния ъгъл φ

(17) $$\frac{1}{2}\frac{L^2}{mR^4}\left[\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 + R^2\right] - \frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3} = E.$$

Полагаме $\sigma = \frac{1}{R}$ и диференцираме равенството (17) още веднъж, като отбелязваме с щрих производната по полярния ъгъл, по този начин се достига до уравнение от вида

(18) $$\sigma'' + \sigma - \frac{3\alpha m}{L^2}\sigma^2 = \frac{km}{L^2}.$$

За да се опрости уравнението, търсим решение във вид на сбор от константа и функция

(18) $$\sigma = \sigma_0 + f,\ \sigma_0 = const..$$

Константата подбираме така, че в уравнението за неизвестната функция да няма свободни членове.

(20) $$-\frac{3\alpha m}{L^2}\sigma_0{}^2 + \sigma_0 - \frac{km}{L^2} = 0,$$

(21) $$f'' + \left(1 - \frac{6\alpha m}{L^2}\sigma_0\right)f + \frac{3\alpha m}{L^2}f^2 = 0.$$

Решаването на първото уравнение налага да преминем към дефинирането на нова безразмерна променлива

(22) $$x \equiv \frac{L^2}{km}\sigma_0 .$$

Така достигаме до уравнението

(23) $$-\alpha_1 x^2 + x - 1 = 0, \text{ където } \alpha_1 = \frac{3\alpha m^2 k}{L^4}.$$

Когато $\alpha_1 = 0$, следва че $x_0 = 1$. Логично е в случая $\alpha \neq 0, \alpha << 1$, да потърсим решението като ред по степените на малкият параметър

(24) $$x = x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1{}^2 x_2 + ...$$

Заместваме (24) в уравнение (23)

(25) $$-\alpha_1\left(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1{}^2 x_2 + ..\right)^2 + x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1{}^2 x_2 + ... - 1 = 0$$

Приравняваме коефициентите пред еднаквите степени и намираме неизвестните величини

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2 \ ...$$

Така окончателно достигаме до изразът за константата

(26) $$\sigma_0 = \frac{km}{L^2} + \frac{3\alpha m^2 k^2}{L^6} + \frac{18\alpha^2 m^5 k^3}{L^{10}} + ...$$

Полагаме

(27) $$n_0{}^2 \equiv 1 - \frac{6\alpha m}{L^2}\sigma_0$$

и достигаме до израза

(28) $$f'' + n_0^{\,2} f + \frac{1-n_0^{\,2}}{2\sigma_0} f^2 = 0 .$$

Преминаваме към безразмерната променлива

(29) $$y \equiv \frac{L^2}{km} f \, , \beta \equiv \frac{1-n_0^{\,2}}{2\sigma_0} \frac{km}{L^2}$$

С β е означен малък параметър, посредством който ще решаваме полученото уравнение

(30) $$y'' + n_0^{\,2} y + \beta y^2 = 0$$

по метода на Поанкаре-Линдщед.
Разглеждаме безразмерната променлива, като функция на $\nu = \omega\varphi$, и записваме уравнението, като този път със щрих означаваме производната по ν.

(31) $$y'' + n_0^{\,2} y + \beta y^2 = 0 .$$

Търсим решение на уравнението (31) във вид на редове

(32) $$\begin{aligned} y &= y_0 + \beta y_1 + \ldots \\ \omega &= n_0 + \beta n_1 + \ldots \end{aligned},$$

Като заместим величините със съответстващите им редове, като краен резултат се получава системата

(33) $$\begin{aligned} & y_0'' + y_0 = 0 \\ & y_1'' + y_1 + 2\frac{n_1}{n_0} y_0'' + y_0^{\,2} = 0 \end{aligned}$$

Първото от двете уравнения се решава веднага

(34) $$y_0 = A\cos(\nu - \nu_0).$$

Заместваме получения резултат във уравнение (33)

(35) $$y_1'' + y_1 = 2\frac{n_1}{n_0} A\cos(\nu - \nu_0) - \frac{A^2}{2}\left[1 + \cos 2(\nu - \nu_0)\right].$$

За да получим периодично решение, приемаме $n_1 = 0$ и полагаме

(36) $$y_1{*} \equiv y_1 - \frac{A^2}{2} .$$

Окончателно уравнението добива вида:

(37) $$y{*}_1'' + y{*}_1 = -\frac{A^2}{2}\cos 2(\nu - \nu_0).$$

Търсим решението във вида $y_1{*} = B\cos 2(\nu - \nu_0)$. Тогава за коефициента пред косинуса намираме $B = \frac{A^2}{6}$. Връщаме се към предишната променлива

(38) $$y = -\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{6}\cos 2(\nu - \nu_0)$$

Сега вече имаме възможност да запишем окончателното решението във вида

(39) $$\sigma = \frac{km}{L^2} + \frac{3\alpha k^2 m^3}{L^6} + \frac{kmA}{L^2}\cos n\varphi + \beta\frac{kmA^2}{6L^2}\cos 2n\varphi - \frac{\beta km}{L^2}\frac{A^2}{2} + \ldots$$

Дефинират се следните величини:

(40) $$\frac{km}{L^2} \equiv \frac{1}{p}$$

(41) $$A \equiv e$$

p и e представляват съответно фокалният параметър и ексцентрицитета на орбитата

(42) $$\sigma = \frac{1}{p} + \frac{3\alpha}{kp^3} + \frac{18\alpha^2}{p^5k^2} + \frac{e}{p}\cos n_0\varphi + \frac{\alpha e^2}{2kp^3}\cos 2n_0\varphi - \frac{3\alpha}{kp^3}\frac{e^2}{2} + ...$$

С точност до втората степен на параметрите β и e, разстоянието до силовият център се определя чрез формулата

(43) $$R = \frac{p}{1 + \frac{3\alpha}{kp^2} + e\cos n_0\varphi} \approx \frac{n_0 p}{1 + en_0 \cos n_0\varphi}, \; n_0 = \sqrt{1 - \frac{6\alpha}{kp^2}}.$$

Движението може да се разглежда, като елиптично, като елипсата се движи равномерно в равнината си по посока на движението на тялото (прецесия). Ъгълът на който се измества елипсата при движение от перихелия (афелия) до перихелия (афелия) е равен на

(44) $$\Delta\varphi - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{n_0} - 1\right) \approx \frac{6\pi\alpha}{kp^2}.$$

За да определим полярния ъгъл като явна функция на времето, използваме формулата

(45) $$\dot{\varphi} = \frac{L}{mR^2} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{R^2(n_0\varphi)}.$$

За нашите разглеждания, ще се ограничим само с членовете до втора степен по ексцентрицитета, като считаме $\beta = \beta(\alpha)$ от порядъка на e. След като го решим, тригонометричните функции имат за аргумент полярния ъгъл. За да получим търсената зависимост, търсим израз за полярния ъгъл, който представяме, чрез ред на Фурие с неизвестни коефициенти. Приравняваме коефициентите пред еднаквите степени на ексцентрицитета и като краен резултат се получава

(46) $$\varphi = \frac{M}{n_0} + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + O\left(\beta e^2\right),$$

където

(47) $$M = \frac{\sqrt{\mu}}{n_0 a^{\frac{3}{2}}}(t - t_0), \; p = a\left(1 - n_0{}^2 e^2\right), \; \mu = \frac{\kappa}{m}.$$

Динамика на въртеливото движение

Разглеждаме екваториалния спътник като твърдо тяло. Анализираме влиянието на сплеснатостта на планетата върху колебанията на спътника.

Определяме положението на центъра на масите O' посредством полярни координати R, φ, с център на к.с. O съвпадащ със силовия център, а положението на една от централните оси на инерция на тялото спрямо радиусвектора отбелязваме с ъгъл Θ

Уравнението на въртеливото движение в случая на екваториална орбита е

(48) $$B\frac{d}{dt}\left(\dot{\Theta} + \dot{\varphi}\right) + \frac{\mu}{R^3}(A - C)\left[3 + 5\frac{3\alpha}{kR^2}\right]\sin\Theta\cos\Theta = 0.$$

С точки са означени производните на величините по времето, A, B, C - главни инерчни моменти на спътника.

В общият случай се отчита и връзката между колебателното (ротационното) движение и орбиталното движение. Изразът за разстоянието от спътника до централното тяло има вида:

(49) $$R = R_0\sqrt{1 - \frac{B}{MR_0{}^2}\left(1 + n_0\theta'\right)}, \; R_0 = \sqrt{\frac{L}{M\dot{\varphi}}}.$$

Производната по ъгъл $\nu \equiv n_0\varphi$ е означена отново с щрих. L е орбиталният момент на спътника. Трансформираме уравнението (48) така, че да го преведем към новата независима променлива ν. След несложни изчисления се достига до израза

$$\frac{p}{R_0(\nu)}\theta'' - 2p\frac{R_0'(\nu)}{R_0^2(\nu)}\theta' + \frac{(A-C)}{2Bn_0^2\left[1-\frac{B}{MR_0^2}(1+n_0\theta')\right]^{\frac{3}{2}}}\left[3+\frac{5p^2}{2R_0^2(\nu)\left[1-\frac{B}{MR_0^2}(1+n_0\theta')\right]}\left(1-n_0^2\right)\right]\sin 2\theta =$$

$$=\frac{2p}{n_0}\frac{R_0'(\nu)}{R_0^2(\nu)},$$

(50)

$$R_0(\nu) = \frac{p}{1+\frac{3\alpha}{kp^2}+\frac{18\alpha^2}{p^4k^2}+e\cos\nu+\frac{\alpha e^2}{2kp^2}\cos 2\nu-\frac{3\alpha}{kp^2}\frac{e^2}{2}+\ldots}.$$

В $R(\nu)$ се подбират необходимият брой членове, в зависимост от приближението, в което се разглежда задачата.

Заключение

Посредством приближени аналитични методи получихме резултати в общ вид. Изведохме уравнения във форма подходяща за нечислен анализ, запазващи специфичните свойства на нелинейната система. Лесно може да се съобрази ролята на параметрите, при преход между качествено различни състояния на системата, чрез използването на аналитични техники.

Подбора на оптималният метод, както и комбинирането и модифицирането с други такива, стои в основата на успеха при такъв начин за решаване на задачите, като може да се направи подобна аналогия с численото интегриране на уравненията.

Литература:

1. Б е л е ц к и й, В. В. Движение искусственого спутника относительно центра масс . Москва, Наука, 1965.
2. Б о р н, М. Атомна механика. Государственое научно-техническое издательство, 1934.
3. M u r r a y, C.D., S.F.,Dermott, 1999. Solar System Dynamics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK
4. Л а н д а у , Л.Д., Е.М. Лифшиц. Краткий курс теоретической физики. Том1. М. „Наука” 1969.
5. D e l a u n a y, C.: 1860, Th´eorie du mouvement de la lune, Mem. 28 (1860); 29 (1867), Acad. Sci.France, Paris.
6. Ш е й р е т с к и, К. Плоски колебания на екваториален спътник под приливно въздействие. В: SES’2005 (Space, Ecology, Safety), Варна, 2005, (ISSN:1313-3888), с.70-75
7. G r e e n b e r g, R., 1982. Orbital evolution of the Galilean satellites. In: Morrison, D. (Ed.), Satellites of Jupiter. Univ. of Arizona Press, Tucson, AZ, pp. 65–92.
8. K a u l a, W.M., 1964. Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution. Rev. Geophys. 2, 661–685.
9. A m b r o s e t t i Antonio, Andrea Malchiodi, Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 104, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
10. P o i n c a r é , H. (1957) [1893], Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Célèste, II, New York: Dover Publ., §123–§128.
11. L i n d s t e d t, A., Abh. K. Akad. Wiss. St. Petersburg 31, No. 4 (1882)
12. Ш е й р е т с к и, К., Д. Гочев, П. Тренчев, Нелинейни явления при колебанията на екваториален спътник, В: SES’2010. с. 97-100.